Leichte Lösung gewisser sehr schwieriger geometrischer Probleme*

Leonhard Euler

§1 In jedem Dreieck sind hauptsächlich vier Punkte gegeben, die in der Geometrie betrachtet zu werden pflegen:

1. Der Schnittpunkt der drei Senkrechten oder Lote, die aus den einzelnen Winkeln zu den gegenüberliegenden Seiten gefällt werden.

2. Der Schnittpunkt der drei Geraden, die von den einzelnen Winkeln aus gezogen die gegenüberliegenden Seiten zweiteilen; dieser Punkt ist zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks.

3. Der Schnittpunkt der drei Geraden, die die einzelnen Winkel mittig schneiden oder halbieren, auf welchen Punkt das Zentrum des dem Dreieck einbeschriebenenen Kreises fällt.

4. Der Schnittpunkt der drei zu den einzelnen Seiten normalen Geraden und diese zweiteilenden, in welchem Punkt das Zentrum des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises aufgefunden wird.

---

*Originaltitel: „Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum“, erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 11, 1767, pp. 103-123“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 26, pp. 139 - 157“, eine Version veröffentlicht in *Arch. d. Math.* 26, 1856, pp. 343-350 (Grunert) [E325a], Eneström-Nummer E 325, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Anke Maurer, im Rahmen des Hauptseminars „Euler“, JGU Mainz

§2 Wenn aus diesen vier Punkten irgendwelche drei in Bezug auf die Lage gegeben sind, ist es ersichtlich, dass das Dreieck daher bestimmt wird, wenn nicht zufällig jene Punkte in einem zusammenlaufen, weil dies im gleichseitigen Dreieck passiert, werden in diesem Fall alle gleichseitigen Dreiecke dem Problem gleichermaßen Genüge leisten. Daher werden also vier Probleme entsprießen, je nachdem welcher dieser vier Punkte für die Bestimmung des Dreiecks ausgelassen wird, wie welche am angenehmsten aufgelöst werden können, habe ich hier zu zeigen beschlossen.

§3 Dass aber diese Probleme sehr schwer zu lösen sind, wird schnell erfahren, wer auch immer sie angegangen ist, weil kaum erkannt wird, unbekannte Größen welcher Art in die Rechnung eingeführt werden müssen, damit zumindest zu die Lösung enthaltenden Gleichungen gelangt wird. Die ganze Aufgabe wird also auf eine geeignete Auswahl der unbekannten Größen zurückgeführt, wobei besonders dafür Sorge zu tragen ist, dass wir nicht in überdrüssigste und unentwirrbare Rechnungen geraten. Nachdem aber dann alle Schwierigkeiten überkommen worden sind, werden sich gewisse vortreffliche Beschaffenheiten zwischen jenen vier Punkten aufzeigen, deren Kenntnis in der Geometrie von nicht geringer Bedeutung anzusehen ist.

§4 Damit also die Figuren nicht mit einer allzu großen Menge an in ihnen zu ziehenden Linien überladen wird, biete ich dasselbe Dreieck ABC viermal dar, im ersten (Fig. 1) sind hauptsächlich die Geraden AM, BN und CP zu den gegenüberliegenden Seiten normal und deren Schnittpunkt bezeichne ich mit dem Buchstaben E, wo der erste Punkt der vier gelegen ist, die ich erwähnt habe. In der zweiten Figur halbieren die Geraden Aa, Bb und Cc die gegenüberliegenden Seiten, deren Schnittpunkt der Punkt F anzeigt, der zweite jener vier erwähnten Punkte und der Schwerpunkt des Dreiecks. In der dritten Figur halbieren die Geraden $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ die Winkel A, B, C und deren Schnittpunkt G liefert den dritten zuvor erwähnten Punkt, natürlich das Zentrum des einbeschriebenen Kreises. Schließlich sind in der vierten Figur aus den Mittelpunkten S, T, V der einzelnen Seiten die Senkrechten SH, TH und VH errichtet worden, während ihr Schnittpunkt H den Schnittpunkt des umbeschriebenen Kreises darbietet.

§5 Damit ich die Lage dieser vier Punkte leichter bestimmen kann und sie darauf folgend miteinander vergleichen kann, fälle ich von den einzelnen aus zur für die Basis angenommene Seite AB die Lote EP, FQ, GR und HS, deren erstes und viertes freilich schon in der Konstruktion selbst auftauchen. Dann nenne ich aber die drei Seiten des Dreiecks:

$$AB = c, \quad AC = b, \quad BC = a;$$

außerdem gefällt es aber auch, dass die Fläche ins Kalkül gezogen wird, die $= A$ sei, und es wird sein, wie bekannt ist:

$$AA = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

oder

$$AA = \frac{1}{16}(2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4)$$

Daher mache ich also die Lage jeder dieser vier Punkte in Bezug auf die Basis AB einzeln auf die folgende Weise ausfindig.

I. Für den Schnittpunkt der Senkrechten E

§6 Zuerst ist von den Elementen bekannt, dass gelten wird (Fig. 1)

$$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c}, \text{ und gleichermaßen } BM = \frac{aa+cc-bb}{2a}.$$

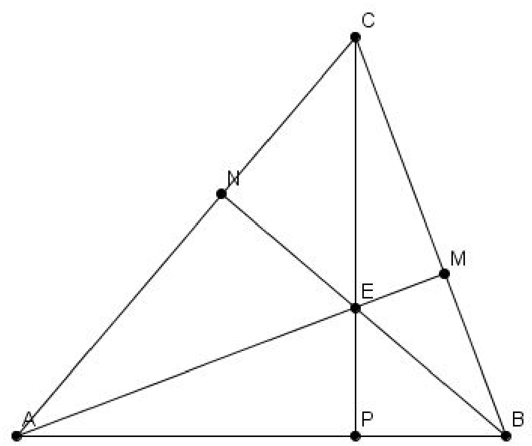

Fig. 1

Des Weiteren wird aber wegen $\frac{1}{2}AM \cdot BC = A \quad AM = \frac{2A}{a}$ sein, woher die Ähnlichkeit der Dreiecke ABM und $AEP \quad AM : BM = AP : EP$ liefert und daher wird

$$EP = \frac{(cc + bb - aa)(aa + cc - bb)}{8cA}.$$

Deshalb wird die Lage des Punktes E in Bezug auf die Basis AB so definiert, dass gilt

$$AP = \frac{cc + bb - aa}{2c} \text{ und } PE = \frac{(cc + bb - aa)(aa + cc - bb)}{8cA}.$$

II. Für den Schwerpunkt F

§7 Nachdem (Fig. 2) aus dem Winkel C zur Basis AB das Lot CP gefällt worden ist, haben wir, wie zuvor,

$$AP = \frac{cc + bb - aa}{2c} \text{ und } CP = \frac{2A}{c}.$$

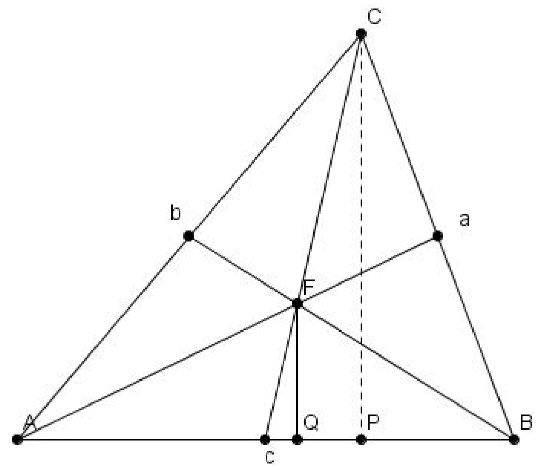

Fig. 2

Nun ist aber aus dem Element bekannt, dass gilt:

$$FQ = \frac{1}{3}CP = \frac{2A}{3c} \text{ und } cQ = \frac{1}{3}cP.$$

Weil aber $Ac = \frac{1}{2}c$ ist, wird sein

$$cP = \frac{bb - aa}{2c} \text{ und daher } cQ = \frac{bb - aa}{6c}$$

und als logische Konsequenz

$$AQ = \frac{3cc + bb - aa}{6c}.$$

Dieser Sache wegen wird die Lage des Punktes F in Bezug auf die Basis AB so definiert, dass gilt

$$AQ = \frac{3cc + bb - aa}{6c} \text{ und } QF = \frac{2A}{3c}.$$

III. Für das Zentrum des einbeschriebenen Kreises G

§8 Weil GR (Fig. 3) der Radius des einbeschriebenen Kreises ist, wird $\frac{1}{2}GR(a + b + c)$ die Fläche des Dreiecks $= A$ sein, woher wird

$$GR = \frac{2A}{a + b + c}.$$

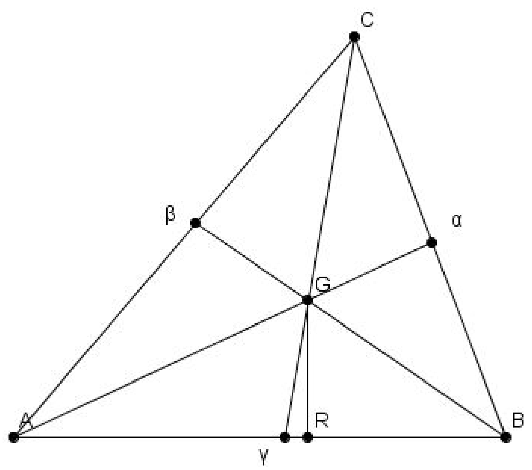

Fig. 3

Dann wird man aber, nachdem das Segment $AR = x$ gesetzt worden ist, wenn von AC von A aus der gleiche Anteil weggeschnitten wird, dort den Berührpunkt haben, von welchem also der Punkt C um das Intervall $= b - x$ entfernt ist. Darauf wird wegen $BR = c - x$, wenn von der Seite BC von B aus das gleiche Intervall $c - x$ weggeschnitten wird, dort diese Seite vom Kreis berührt werden, woher der Punkt C von diesem Punkt um das Intervall $= a - c + x$ entfernt sein wird, weil welches aus der Natur des Kreises jenem $b - x$ gleich ist, wird $x = \frac{c+b-a}{2}$ sein. Daher wird dieser Punkt G in Bezug auf die Basis AB so bestimmt, dass gilt

$$AR = \frac{c+b-a}{2} \text{ und } RG = \frac{2A}{a+b+c}.$$

IV. Für das Zentrum des umbeschriebenen Kreises H

§9 Hier ist freilich sofort (Fig. 4) aus der Konstruktion $AS = \frac{1}{2}c$. Dann wird aber, nachdem von A aus zu BC das Lot AM gefällt worden ist, sein

$$AM = \frac{2A}{a} \text{ und } CM = \frac{aa+bb-cc}{2a}.$$

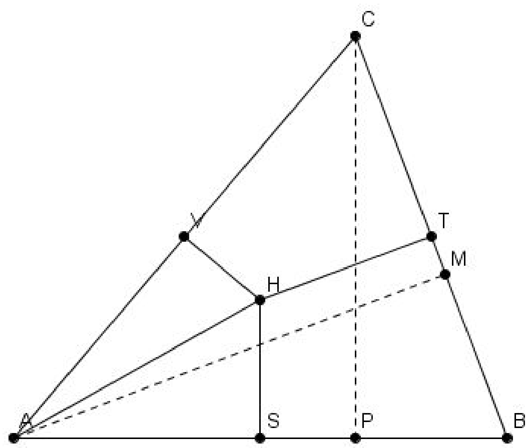

Fig. 4

Nachdem aber die Gerade AH gezeichnet worden ist, ist aus der Natur des Kreises klar, dass der Winkel AHS gleich dem Winkel ACB sein wird, und daher wird das Dreieck AHS dem Dreieck ACM ähnlich sein, woher $AM : CM = AS : HS$ wird, und so wird erschlossen

$$HS = \frac{c(aa + bb - cc)}{8A}.$$

Daher wird die Lage des Punktes H in Bezug auf die Basis AB so definiert, dass ist

$$AS = \frac{1}{2}c \quad \text{und} \quad SH = \frac{c(aa + bb - cc)}{8A}.$$

§10 Daher werden wir nur die Distanzen zwischen diesen vier Punkten bestimmen können, wenn sie freilich in derselben Figur ausgedrückt werden würden; es wird nämlich sein

$$\begin{aligned}
EF^2 &= (AP - AQ)^2 + (PE - QF)^2 \\
EG^2 &= (AP - AR)^2 + (PE - RG)^2 \\
EH^2 &= (AP - AS)^2 + (PE - SH)^2 \\
FG^2 &= (AQ - AR)^2 + (QF - RG)^2 \\
FH^2 &= (AQ - AS)^2 + (QF - SH)^2 \\
GH^2 &= (AR - AS)^2 + (RG - SH)^2
\end{aligned}$$

Diese Intervalle müssen aber daher berechnet werden, weil, wenn drei bestimmte dieser vier Punkte als gegeben vorgelegt werden, nichts anderes außer deren gegenseitige Abstände als bekannt angenommen wird, woher später die Seiten des Dreiecks ausfindig zu machen sind.

§11 Hier ist es aber besonders zu bemerken, dass jene Abstände zwischen unseren vier Punkten notwendigerweise so ausgedrückt werden müssen, dass die drei Seiten des Dreiecks in die Ausdrücke gleichermaßen eingehen, weil keiner anderen Seite vor den Übungen in Bezug auf diese Distanzen eine besondere Eigenschaft zugeteilt werden kann. Dieses Grundes wegen, im Begriff, die Seiten des Dreiecks ohne jeglichen Unterschied zu betrachten, werde ich festlegen:

$$a + b + c = p, \quad ab + ac + bc = q \quad \text{und} \quad abc = r,$$

so dass ich anstelle dieser Seiten nun diese drei auf die einzelnen gleichermaßen bezogenen Größen p, q und r in die Rechnung einführen werde. Weil daher gilt:

$$\begin{aligned} aa+bb+cc &= pp-2q, \\ aabb+aacc+bbcc &= qq-2pr, \\ a^4+b^4+c^4 &= p^4-4ppq+2qq+4pr, \end{aligned}$$

wird die Fläche A so ausgedrückt werden, dass ist:

$$AA = \frac{1}{16}p(-p^3+4pq-8r) = \frac{-p^4+4ppq-8pr}{16}.$$

Nachdem dies bemerkt worden ist, werde ich die sechs Distanzen einzeln auf diese neuen Größen zurückführen.

I. Untersuchung der Distanz der Punkte E und F

§12 Hier haben wir zuerst:

$$\begin{aligned} AP-AQ &= \frac{cc+bb-aa}{2c} - \frac{3cc+bb-aa}{6c} = \frac{bb-aa}{3c} \\ PE-QF &= \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA} - \frac{2A}{3c} \\ &= \frac{3(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)-16AA}{24cA}, \end{aligned}$$

welche Ausdrücke auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden:

$$\begin{aligned} AP-AQ &= \frac{(bb-aa)\sqrt{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}}{12cA}, \\ PE-QF &= \frac{2c^4-a^4-b^4+2aabb-bbcc-aacc}{12cA}, \end{aligned}$$

deren Quadrate addiert liefern:

$$EF^2 = \frac{1}{36AA}\left\{\begin{array}{l} +a^6+b^6+c^6 \\ -a^4bb-aab^4-a^4cc-aac^4-b^4cc-bbc^4 \\ +3aabbcc \end{array}\right\},$$

wo natürlich die Buchstaben a, b, c gleichermaßen eingehen. Es ist in der Tat:

$$a^4bb + aab^4 + etc. = ppqq - 2q^3 - 2p^3r + 4pqr - 3rr,$$
$$a^6 + b^6 + c^6 = p^6 - 6p^4q + 9ppqq - 2q^3 + 6p^3r - 12pqr + 3rr,$$

woher wir erhalten:

$$EF^2 = \frac{1}{36AA}(p^6 - 6p^4q + 8ppqq + 8p^3r - 16pqr + 9rr),$$

welcher Ausdruck sich auf diese Form zurückführen lässt:

$$EF^2 = \frac{rr}{4AA} - \frac{4}{9}(pp - 2q).$$

II. Untersuchung der Distanz der Punkte E und G

§13 Hier haben wir:

$$AP - AR = \frac{cc + bb - aa}{2c} - \frac{c + b - a}{2} = \frac{bb - bc - aa + ac}{2c},$$
$$PE - RG = \frac{(cc + bb - aa)(aa + cc - bb)}{8cA} - \frac{2A}{a + b + c}$$

oder

$$PE - RG = \frac{c^4 - a^4 - b^4 + 2aabb}{8cA} + \frac{p^3 - 4pq + 8r}{8A}$$

und durch Reduzieren auf diesen gemeinsamen Nenner:

$$AP - AR = \frac{(bb - bc - aa + ac)\sqrt{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}}{8cA}$$
$$PE - RG = \frac{2c^4 - (a + b)c^3 - (a - b)^2cc + (a + b)(a - b)^2c - (aa - bb)^2}{8cA},$$

die Summe der Quadrate welcher durch 4cc geteilt auf diese Form zurückgeht:

$$\begin{aligned} EG^2 = \; & \tfrac{1}{36AA}\{(a^6 + b^6 + c^6) - (a^5b + ab^5 + a^5c + ac^5 + b^5c + bc^5) \\ & -(a^4bb + aab^4 + a^4cc + aac^4 + b^4cc + bbc^4) + 3(a^4bc + ab^4c + abc^4) \\ & -2(a^3bbc + a^3bcc + aab^3c + ab^3cc + aabc^3 + abbc^3) \\ & +(2(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) + 6aabbcc\}. \end{aligned}$$

Bevor ich diesen Ausdruck auf die Buchstaben p, q und r reduziere, bemerke ich, dass gilt:

$$\begin{aligned}&EG^2 + (aa - ab) + (bb - ac) + (cc - bc)\\ &= \frac{abc}{4AA}\{(a^3 + b^3 + c^3) - (aab + abb + aac + acc + bbc + bcc) + 3abc\}\\ &= \frac{abc(aa + bb + cc - 2ab - 2ac - 2bc)(a + b + c) + 9aabbcc}{4AA}.\end{aligned}$$

Weil nun $aa + bb + cc = pp - 2q$ ist, ist die Reduktion leicht, es geht natürlich hervor:

$$EG^2 + pp - 3q = \frac{pr(pp - 4q) + 9rr}{4AA}$$

und so wird diese Distanz so definiert, dass ist

$$EG^2 = \frac{r(p^3 - 4pq + 9r)}{4AA} - pp + 3q = \frac{rr}{4AA} - \frac{4r}{p} - pp + 3q.$$

III. Untersuchung der Distanz der Punkte E und H

§14 Weil hier ist:

$$\begin{aligned}AP - AS &= \frac{cc + bb - aa}{2c} - \frac{1}{2}c\\ PE - SH &= \frac{(cc + bb - aa)(aa + cc - bb)}{8cA} - \frac{c(aa + bb - cc)}{8A},\end{aligned}$$

werden wir haben:

$$AP - AS = \frac{bb - aa}{2c} \quad \text{und} \quad PE - SH = \frac{2c^4 - (aa + bb)cc - (aa - bb)^2}{8cA}$$

wird durch Addieren der Quadrate und einer anschließenden Division durch $4cc$ erhalten:

$$EH^2 = \frac{1}{16AA}\{(a^6 + b^6 + c^6) - (a^4bb + a^4cc + aab^4 + aac^4 + b^4cc + bbc^4) + 3aabbcc\},$$

welche wegen $16AA = -a^4 - b^4 - c^4 + 2aabb + 2aacc + 2bbcc$ auf diese Form reduziert wird:

$$EH^2 = \frac{9aabbcc}{16AA} - aa - bb - cc,$$

woher die Substitution leicht zustande gebracht wird, es resultiert nämlich:

$$EH^2 = \frac{9rr}{16AA} - pp + 2q.$$

IV. Untersuchung der Distanz der Punkte F und G

§15 Aus den oben gefundenen Formeln haben wir her:

$$\begin{aligned} AQ - AR &= \frac{3cc + bb - aa}{6c} - \frac{c + b - a}{2} = \frac{3(a-b)c - aa + bb}{6c}, \\ QF - RG &= \frac{2A}{3c} - \frac{2A}{a+b+c} = \frac{2A(a+b-2c)}{3c(a+b+c)}, \end{aligned}$$

die Summer der Quadrate welcher auf diese Form reduziert wird:

$$\begin{aligned} FG^2 = \quad & \tfrac{1}{9(a+b+c)^2}\{-(a^4+b^4+c^4) + (a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + b^3c + bc^3) \\ & +4(aabb + aacc + bbcc) - 5(abcc + abbc + aabc)\}. \end{aligned}$$

Weil nun gilt:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= p^4 - 4ppq + 2qq + 4pr, \\ aabb + aacc + bbcc &= qq - 2pr, \\ a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + b^3c + bc^3 &= ppq - 2qq - pr, \\ abcc + abbc + aabc &= pr, \end{aligned}$$

nimmt der gefundene Ausdruck diese Form an:

$$FG^2 = \frac{1}{9pp}(-p^4 + 5ppq - 18pr) = \frac{-p^3 + 5pq - 18r}{9p}.$$

V. Untersuchung der Distanz der Punkte F und H

§16 Für diesen Fall haben wir:

$$\begin{aligned} AQ - AS &= \frac{3cc + bb - aa}{6c} - \frac{1}{2}c = \frac{bb - aa}{6c} \\ QF - SH &= \frac{2A}{3c} - \frac{c(aa + bb - cc)}{8A} = \frac{2c^4 - (aa+bb)cc - (aa-bb)^2}{24cA}. \end{aligned}$$

Wenn wir daher diese Formeln mit dem ersten Fall vergleichen, entdecken wir, dass gilt:

$$AQ - AS = \frac{1}{2}(AP - AQ) \text{ und } QF - SH = \frac{1}{2}(PE - QF),$$

woher es offenbar ist, dass $FH = \frac{1}{2}EF$ sein wird und daher

$$FH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{1}{9}(pp - 2q).$$

VI. Untersuchung der Distanz der Punkte G und H

§17 Für diesen letzten Fall hat man:

$$\begin{aligned} AR - AS &= \frac{c+b-a}{2} - \frac{1}{2}c = \frac{b-a}{2} \\ RG - SH &= \frac{2A}{a+b+c} - \frac{c(aa+bb-cc)}{8A} \\ &= \frac{(a+b)c^3 + (aa+bb)cc - (a+b)(aa+bb)c - (aa-bb)^2}{8(a+b+c)A}, \end{aligned}$$

wenn die Quadrate welcher zwei Formeln addiert werden, wird der folgende Ausdruck aufgefunden:

$$\begin{aligned} GH^2 = \ & \tfrac{abc}{16(a+b+c)^2AA}\{(a^5+b^5+c^5) + (a^4b + a^4c + b^4c + ab^4 + ac^4 + bc^4) \\ & + (abc^3 + ab^3c + a^3bc) - 2(a^3bb + a^3cc + b^3cc + aab^3 + aac^3 + bbc^3)\}, \end{aligned}$$

welcher durch $a+b+c$ reduziert in diesen übergeht:

$$\begin{aligned} GH^2 = \ & \tfrac{abc}{16(a+b+c)AA}\{(a^4+b^4+c^4) + (aabc + abbc + abcc \\ & -2(aabb + aacc + bbcc)\}, \end{aligned}$$

woher nach der Einsetzung erschlossen wird

$$GH^2 = \frac{r}{16pAA}(p^4 - 4ppq + 9pr) = \frac{r(p^3 - 4pq + 9r)}{16AA}$$

oder

$$GH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{r}{p}.$$

§18 Betrachte also auf einen Blick die Quadrate dieser sechs Intervalle:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & EF^2 & = \frac{rr}{4AA} - \frac{4}{9}(pp-2q) \\ \text{II.} & EG^2 & = \frac{rr}{4AA} - pp + 3q - \frac{4r}{p} \\ \text{III.} & EH^2 & = \frac{9rr}{16AA} - pp + 2q \\ \text{IV.} & FG^2 & = -\frac{1}{9}pp + \frac{5}{9}q - \frac{2r}{p} \\ \text{V.} & FH^2 & = \frac{rr}{16AA} - \frac{1}{9}(pp-2q) \\ \text{VI.} & GH^2 & = \frac{rr}{16AA} - \frac{r}{p}, \end{array}$$

wo es ersichtlich ist, dass (Fig. 5) $EH = \frac{3}{2}EF$ und $FH = \frac{1}{2}EF$, und so der Punkt H durch die Punkte E, F von selbst bestimmt wird, wenn natürlich die drei Punkte E, F, G das Dreieck EFG bilden, dann wird der Punkt H so auf der verlängerten Gerade EF gelegen sein, dass gilt

$$FH = \frac{1}{2}EF \text{ und daher } EH = \frac{3}{2}EF.$$

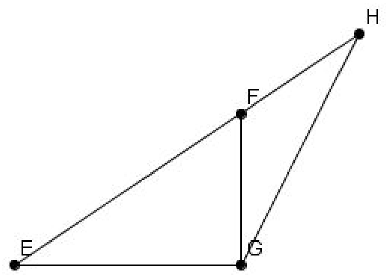

Fig. 5

Daher wird aber abgeleitet

$$4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2,$$

was mit den gefundenen Werten im höchsten Grade übereinstimmt.

§19 Damit wir nun diese Formeln noch mehr vereinfachen, wollen wir festlegen $4pq - p^3 - 8r = 4s$, sodass gilt

$$4AA = ps \text{ und } 4q = pp + \frac{8r}{p} + \frac{4s}{p};$$

dann wollen wir aber setzen:

$$\frac{rr}{ps} = R, \ \frac{r}{p} = Q \ \text{und} \ pp = P,$$

so dass P, Q, R zwei Dimensionen involvierende Größen sind. Weil ja also daher $\frac{s}{p} = \frac{QQ}{R}$ ist, wird $p = \sqrt{P}$, $q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{QQ}{R}$ und $r = Q\sqrt{P}$ und $4AA = \frac{PQQ}{R}$ sein, und unsere Intervalle werden so ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & EF^2 & = R - \frac{2}{9}P + \frac{16}{9}Q + \frac{8QQ}{9R} \\
\text{II.} & EG^2 & = R - \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{3QQ}{R} \\
\text{III.} & EH^2 & = \frac{9}{4}R - \frac{1}{2}P + 4Q + \frac{2QQ}{R} \\
\text{IV.} & FG^2 & = \quad + \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5QQ}{9R} \\
\text{V.} & FH^2 & = \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2QQ}{9R} \\
\text{VI.} & GH^2 & = \frac{1}{4}R \qquad - Q.
\end{array}$$

§20 Weil also von diesen vier Punkten drei, wenn nicht diese drei E, F und H genommen werden, schon die Bestimmung des vierten enthalten, resultiert ein einziges Problem, was sich so verhält:

Problem

Nachdem von der Lage diese vier (Fig. 5) in jedem beliebigen Dreieck angebbaren Punkte gegeben worden sind

1°. *mit dem Schnittpunkt der aus den einzelnen Winkeln zu den gegenüberliegenden Seiten gezogenen Senkrechten E*

2°. *dem Schwerpunkt F*

3°. *dem Zentrum des einbeschriebenen Kreises G und*

4°. *dem Zentrum des umbeschriebenen Kreises H*

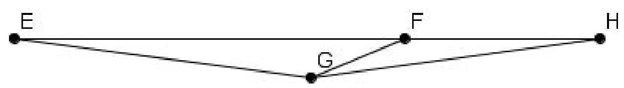

Fig. 6

das Dreieck zu konstruieren. Dieses Problem wird sich aus den bisher gefundenen Beschaffenheiten dieser Punkte ziemlich gefällig auflösen lassen.

Lösung

§21 Weil die Lage dieser vier Punkte durch deren Distanzen gegeben ist, wollen wir nennen:

$$GH = f, \ \ FH = g \ \text{ und } \ FG = h$$

und wir wissen, dass sein wird

$$EF = 2g \ \text{ und } \ EH = 3g \ \text{ und ebenso } \ EG = \sqrt{6gg + 3hh - 2ff}.$$

Nun haben wir also sofort diese drei Gleichungen

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & ff & = \frac{1}{4}R - Q \\ \text{II.} & gg & = \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2QQ}{9R} \\ \text{III.} & hh & = \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5QQ}{9R}, \end{array}$$

aus deren Auflösung wir erschließen:

$$R = \frac{4f^4}{3gg + 6hh - 2ff}, \ \ Q = \frac{3ff(ff - gg - 2hh)}{3gg + 6hh - 2ff}$$

und

$$P = \frac{27f^4}{3gg + 6hh - 2ff} - 12ff - 15gg + 6hh,$$

woher wird

$$\frac{QQ}{R} = \frac{9(ff - gg - 2hh)^2}{4(3gg + 6hh - 2ff)}.$$

§22 Nach Finden dieser Werte werden die drei folgenden Ausdrücke ausfindig gemacht:

$$p = \sqrt{P}, \ \ q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{QQ}{R} \ \text{ und } \ r = Q\sqrt{P}$$

und daher werde diese kubische Gleichung gebildet:

$$z^3 - pzz + qz - r = 0,$$

deren drei Wurzeln die drei Seiten des gesuchten Dreiecks geben werden, auf welche Weise man von selbigem eine leichte Konstruktion hat.

Beispiel

§23 Nachdem die Dreiecksseiten $a = 5$, $b = 6$ und $c = 7$ genommen worden sind, so dass die Fläche $A = 6\sqrt{6}$ ist, werden daher die Distanzen der vier Punkte erschlossen werden:

$$EF^2 = \frac{155}{72}, \ EG^2 = \frac{11}{8}, \ EH^2 = \frac{155}{32}, \ FG^2 = \frac{1}{9}, \ FH^2 = \frac{155}{288}, \ GH^2 = \frac{35}{32},$$

woher die Lage dieser Punkte als eine solche hervorgeht, wie sie in Figur 6 dargestellt wird. Weil wir also haben:

$$ff = \frac{35}{32}, \ gg = \frac{155}{288} \text{ und } hh = \frac{1}{9},$$

wollen wir sehen, ob die gefundene Lösung zu dem angenommenen Dreieck führt.

§24 Daher wird aber $3gg + 6hh - 2ff = \frac{3}{32}$, dann in der Tat

$$ff - gg - 2hh = \frac{1}{3}, \ 4ff + 5gg - 2hh = \frac{219}{32},$$

es wird erschlossen:

$$R = \frac{1225}{24}, \ Q = \frac{35}{3}, \ P = 324 \text{ und } \frac{QQ}{R} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3},$$

woher wir erlangen:

$$p = \sqrt{P} = 18, \ q = 107 \text{ und } r = \frac{35}{3} \cdot 18 = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$$

und daher entspringt diese kubische Gleichung

$$z^3 - 18zz + 107z - 210 = 0,$$

deren drei Wurzeln offenbar 5, 6, 7 sind, welches die drei Seiten des Genüge leistenden Dreiecks selbst sind.

Der Fall, in dem die vier Punkte auf einer Geraden liegen

§25 Weil in diesem Fall ist (Fig. 7):

$$FH = g, \;\; FG = h, \;\; GH = f, \;\; EF = 2g, \;\; EH = 3g \;\text{ und }\; EG = 2g - h,$$

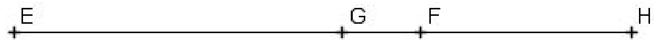

Fig. 7

wird $g = f - h$ sein, woher wir nach dieser Substitution erschließen:

$$R = \frac{4f^4}{(f-3h)^2}, \;\; Q = \frac{3ffh(2f-3h)}{(f-3h)^2}, \;\; P = \frac{3h(4f-3h)^3}{(f-3h)^2}$$

und daher

$$\frac{QQ}{R} = \frac{9hh(2f-3h)^2}{4(f-3h)^2}.$$

Aus diesen finden wir aber weiter:

$$p = \frac{(4f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}$$
$$q = \frac{3fh(4f-3h)(5f-6h)}{(f-3h)^2}$$
$$r = \frac{3ffh(2f-3h)(4f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{(f-3h)^3}.$$

§26 Weil nun die Wurzeln dieser kubischen Gleichung:

$$z^3 - pzz + qz - r = 0$$

die drei Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks liefern, wollen wir, um sie gefälliger zu machen, festlegen

$$z = \frac{y\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}$$

und es wird diese Gleichung hervorgehen:

$$y^3 - (4f - 3h)yy + f(5f - 6h)y - ff(2f - 3h) = 0,$$

deren Wurzeln natürlich sind

$$f, \ f \ \text{und} \ 2f - 3h.$$

Deshalb werden die Seiten des gesuchten Dreiecks, welches gleichschenklig wird, sein:

$$a = b = \frac{f\sqrt{3h(4f - 3h)}}{f - 3h} \ \text{und} \ c = \frac{(2f - 3h)\sqrt{3h(4f - 3h)}}{f - 3h}.$$

§27 Dieser Fall ist aber per se leicht lösbar, weil jene Gerade, auf welcher die Punkte gegeben sind, das Dreieck notwendigerweise in zwei gleiche Teile teilt und daher das Dreieck gleichschenklig ist. Nachdem aber sofort vom Anfang $b = a$ gesetzt worden ist, wird

$$A = \frac{1}{4}c\sqrt{4aa - cc}$$

und

$$AP = AQ = AR = AS = \frac{1}{2}c,$$

dann in der Tat

$$PE = \frac{c^3}{8A}, \ QF = \frac{2A}{3c}, \ RG = \frac{2A}{2a + c}, \ SH = \frac{c(2aa - cc)}{8A},$$

woher wegen der auf dem Mittelpunkt der Basis, welcher O sei, zusammenfallenden Punkte P, Q, R, S die Intervalle zwischen diesen Punkten werden:

$$\begin{aligned} OF - OE &= \tfrac{2(aa-cc)}{3\sqrt{4aa-cc}}, \quad & OG - OE &= \tfrac{c(a-c)}{\sqrt{4aa-cc}}, \quad & OH - OE &= \tfrac{aa-cc}{\sqrt{4aa-cc}}, \\ OF - OG &= \tfrac{(a-c)(2a-c)}{3\sqrt{4aa-cc}}, \quad & OH - OF &= \tfrac{aa-cc}{3\sqrt{4aa-cc}}, \quad & OH - OG &= \tfrac{a(a-c)}{\sqrt{4aa-cc}}. \end{aligned}$$

§28 Hier müssen zwei Fälle betrachtet werden, je nachdem ob entweder $a > c$ oder $a < c$ war, denn wenn $a = c$ oder das Dreieck gleichseitig ist, verschmelzen alle vier Punkte zu einem.

Fig. 8

I Ist $a > c$, werden die Punkte angeordnet sein wie es Figur 8 darstellt, wo $HF = \frac{1}{3}EH$ oder $EF = \frac{2}{3}EH$ und $EG < \frac{1}{2}EH$ ist, und in diesem Fall fällt der Mittelpunkt der Basis O auf die über E hinaus verlängerte Gerade HE, dass ist

$$OE = \frac{cc}{2\sqrt{4aa - cc}}.$$

II Ist $a < c$, werden die Punkte angeordnet sein, wie Fig. 9 darstellt, wo wiederum $HF = \frac{1}{3}EH$ oder $EF = \frac{2}{3}EH$ ist, aber $EG > \frac{1}{2}EH$. In diesem Fall fällt aber der Basismittelpunkt O auf die über H hinaus verlängerte Gerade EH, dass gilt

$$HO = \frac{2aa - cc}{2\sqrt{4aa - cc}},$$

woher, wenn $2aa < cc$ ist, der Punkt O sogar innerhalb von H und E fällt.

§29 Nachdem also auf einer Geraden die drei Punkte E, G und H gegeben worden sind, so dass G innerhalb von den äußersten E und H gelegen ist, ist zu sehen, ob $EG < \frac{1}{2}EH$ oder $EG > \frac{1}{2}EH$ ist. Im ersten Fall, in dem $EG < \frac{1}{2}EH$ ist, verhält sich die Lösung so. Es sei (Fig. 8) $EH = 2d$ und $EG = d - e$, und daher wird aufgefunden

$$a = b = \frac{(d+e)}{2e}\sqrt{(d+3e)(3d+e)},$$
$$c = \frac{d-e}{2e}\sqrt{(d+3e)(3d+e)} \text{ und } OE = \frac{(d-e)^2}{4e}.$$

Im letzten Fall (Fig. 9) $EG > \frac{1}{2}EH$ wird die Lösung diese sein:

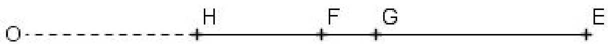

Fig. 9

Es sei $EH = 2d$ und $EG = d + e$, und daher wird erschlossen

$$a = b = \frac{d-e}{2e}\sqrt{(d-3e)(3d-e)}, \quad c = \frac{d+e}{2e}\sqrt{(d-3e)(3d-e)} \text{ und } OE = \frac{(d+e)^2}{2e},$$

woher es klar zutage tritt, dass dieser Fall keine Geltung haben kann, wenn d innerhalb der Grenzen $3e$ und $\frac{1}{3}e$ enthalten ist. Weil nämlich $2a > c$ ist, ist es von Nöten, dass $d > 3e$ ist.

§30 Aus diesem Fall (Fig. 5) ist es möglich zu erschließen, dass auch im Allgemeinen eine gefälligere Lösung hervorgehen wird, wenn nach Weglassen des Punktes F die drei Punkte E, G und H betrachtet werden. Wir wollen also festlegen:

$$EG = e, \quad GH = f \quad \text{und} \quad EH = k$$

Und es wird sein

$$FH = g = \frac{1}{3}k, \quad EF = \frac{2}{3}k \quad \text{und} \quad FG = h = \sqrt{\frac{1}{3}ee + \frac{2}{3}ff - \frac{2}{9}kk}$$

und daher erlangen wir

$$R = \frac{4f^4}{2ff + 2ee - kk}, \quad Q = \frac{ff(kk - ff - 2ee)}{2ee + 2ff - kk}$$

und

$$P = \frac{27f^4}{2ee + 2ff - kk} + 2ee - 8ff - 3kk = \frac{4e^4 + 11f^4 + 3k^4 - 12eeff + 2ffkk - 8eekk}{2ee + 2ff - kk}$$

dann aber

$$\frac{QQ}{R} = \frac{(kk - ff - 2ee)^2}{4(2ee + 2ff - kk)},$$

woher wird

$$p = \sqrt{P}, \quad q = \frac{2e^4 + f^4 + k^4 - 6eeff - 3eekk + 2ffkk}{2ee + 2ff - kk} \quad \text{und} \quad r = Q\sqrt{P}$$

und die Wurzeln der Gleichung $z^3 - pzz + qz - r = 0$ geben die Seiten des gesuchten Dreiecks: Diese Gleichung geht nach Setzen von $z = y\sqrt{P}$ in diese über:

$$y^3 - yy + \frac{(2e^4 + f^4 + k^4 - 6eeff - 3eekk + 2ffkk)y - ff(kk - 2ee - ff)}{4e^4 + 11f^4 + 3k^4 - 12eeff - 8eekk + 2ffkk} = 0.$$

§31 Hier bemerke ich aber, dass diese gegebenen Größen e, f, k nicht nur so angenommen werden müssen, dass sie ein Dreieck festlegen, sondern, weil ja die Seiten des gesuchten Dreieckes a, b, c als positiv angesehen werden können, außerdem sowohl P als auch Q und auch R positive Werte erhalten müssen.

Nicht nur muss also $kk < 2ee + 2ff$ sein, sondern außerdem $kk > 2ee + ff$, dann aber, damit P positiv wird, ist es notwendig, dass gilt

$$3kk > 4ee + ff + 2\sqrt{e^4 + 11eeff - 8f^4},$$ [1]

nach Vergleich welcher Bedingung mit jenen folgt, dass gelten muss

$$ff > \frac{8}{19}ee \text{ und } ff < \frac{11+\sqrt{153}}{16}ee \text{ oder } ff < \frac{19}{13}ee,$$

andernfalls ließe das Problem keine Lösung zu.

BEISPIEL

§32 Es sei $ee = ff$, es wird sein

$$R = \frac{4f^4}{4ff - kk}, \quad Q = \frac{ff(kk - 3ff)}{4ff - kk}$$

---

[1] Von hier bis zum Ende dieses Paragraphen sind die Aussagen Eulers fehlerhaft. Aus der Bedingung $Q > 0$ und $R > 0$ folgt

$$2e^2 + f^2 < k^2 < 2e^2 + 2f^2.$$

Wenn wir festsetzen, dass

$$k^2 = 2e^2 + (1+\alpha)f^2, \quad 0 < \alpha < 1,$$

wird der Zähler von P

$$f^2(16f^2 - 4e^2 + 4\alpha(e^2 + 2f^2) + 3\alpha^2 f^2).$$

Es ist ausreichend, dass $4f^2 > e^2$ ist, damit dieser Zähler positiv sei. Durch Multiplikation mit 3 wird der Zähler von P

$$= (3k^2 - 4e^2 + f^2)^2 - 4e^4 - 28e^2f^2 + 32f^4.$$

Daraus folgt die Wurzel des quadratischen Ausdrucks (denn es ist $3k^2 > 4e^2 - f^2$ aus der Bedingung $k^2 > 2e^2 + f^2$):

$$3k^2 > 4e^2 - f^2 + 2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4},$$

welche Formel sich von der oben gegebenen Formel Eulers unterscheidet.

Berichtigt von Andreas Speiser

und

$$P = \frac{27f^4}{4ff-kk} - 6ff - 3kk = \frac{3(kk-ff)^2}{4ff-kk} \text{ und } \frac{QQ}{R} = \frac{(kk-3ff)^2}{4(4ff-kk)}$$

und daher

$$p = \frac{(kk-ff)\sqrt{3}}{\sqrt{4ff-kk}}, \ q = \frac{k^4 - ffkk - 3f^4}{4ff-kk} \text{ und } r = \frac{ff(kk-3ff)(kk-ff)\sqrt{3}}{(4ff-kk)\sqrt{4ff-kk}},$$

es sei nun $ee = ff = 2$ und $kk = 7$ und es wird werden

$$p = 5\sqrt{3}, \ q = 23 \text{ und } r = 10\sqrt{3}$$

und die Seiten des gesuchten Dreiecks werden die Wurzeln dieser kubischen Gleichung sein

$$z^3 - 5zz\sqrt{3} + 23z - 10\sqrt{3} = 0,$$

die nach Setzen von $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$ in diese übergehen wird

$$y^3 - 15yy + 69y - 90 = 0,$$

von welcher eine Wurzel $y = 6$ ist, woher die zwei übrigen sind

$$y = \frac{9+\sqrt{21}}{2} \text{ und } y = \frac{9-\sqrt{21}}{2}$$

und so sind die Seiten des gesuchten Dreiecks:

$$a = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \ b = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \ c = 2\sqrt{3}.$$

§33 Aber sogar allgemeiner, während $ee = ff$ bleibt, auf welche Weise auch immer k angenommen wird, wenn $z = \frac{y}{\sqrt{3(4ff-kk)}}$, hat man diese aufzulösende Gleichung

$$y^3 - 3(kk-ff)yy + 3(k^4 - ffkk - 3f^4)y - 9ff(kk-3ff)(kk-ff) = 0,$$

welcher zuerst $y = 3ff$ genügt und dann die zwei übrigen Wurzeln aus dieser Gleichung

$$yy - 3(kk-2ff)y + 3(kk-3ff)(kk-ff) = 0,$$

die sind

$$y = \frac{3(kk - 2ff) \pm k\sqrt{3(4ff - kk)}}{2},$$

und so werden die drei Seiten des gesuchten Dreiecks:

$$a = \frac{(kk - 2ff)\sqrt{3}}{2\sqrt{4ff - kk}} + \frac{1}{2}k,$$
$$b = \frac{(kk - 2ff)\sqrt{3}}{2\sqrt{4ff - kk}} - \frac{1}{2}k,$$
$$c = \frac{ff\sqrt{3}}{\sqrt{4ff - kk}}.$$

§34 In den übrigen Fällen wird die Aufgabe nicht so leicht erledigt, weil die kubische Gleichung keine Faktoren zulässt. Um dies an einem Beispiel zu zeigen, sei $ee = 3$, $ff = 2$ und $kk = 9$; daher sind die Seiten des Dreiecks die Wurzeln dieser kubischen Gleichung

$$z^3 - zz\sqrt{71} + 22z - 2\sqrt{71} = 0;$$

um diese aufzulösen, werde der Winkel α gesucht, dessen Kosinus $= +\sqrt{\frac{71}{125}}$[2] ist, der spitz sein wird, nach Finden von welchem die Seiten des Dreiecks sein werden:

$$a = \frac{1}{3}\sqrt{71} + \frac{2}{3}\sqrt{5} \cdot \cos(60^\circ - \frac{1}{3}\alpha),$$
$$b = \frac{1}{3}\sqrt{71} + \frac{2}{3}\sqrt{5} \cdot \cos(60^\circ + \frac{1}{3}\alpha),$$

und

$$c = \frac{1}{3}\sqrt{71} - \frac{2}{3}\sqrt{5} \cdot \cos\frac{1}{3}\alpha,$$

wo näherungsweise $\alpha = 41^\circ 5' 30''$ [3] ist und so wird durch die Dreiteilung eines Winkels das Problem immer hinreichend bequem aufgelöst werden.

[2] Erstausgabe: $\sqrt{\frac{71}{75}}$. Berichtigt von Andreas Speiser

[3] Erstausgabe: $11^\circ 32' 13''$. Berichtigt von Andreas Speiser